حول تمديد توزيـع ويبل المعمم وبعض الصيغ الجديدة المستحدثة

د. باشيوة لحسن، أستاذ مشارك، احصاء رياضي
جامعة حائل، المملكة العربية السعودية

مستخلص

يقدم هذا البحث تصوراً شاملاً ومعمقاً عن تطور توزيـع ويبل قديما وحديثا، وذلك من خلال استعراض أهم الصيغ لتمديد دالة ومعلمات توزيـع ويبل، بالإضافة الى التسهيلات التي تقدمها هذه الصيغ، مع الاسهاب في تقديم الصيغة الجديدة ذات الخمس معلمات المشتقة من الصيغة العامة. كما تم التحقق مما يمتلكه النموذج الجديد من وظائف تساهم في الاستجابة للعديد من المسائل المطروحة في الاستشعار عن كل من دالتي الاخفاق والموثوقية من خلال تقديرات أقصى احتمال لمعلمات هذا التوزيـع، وفترات الثقة المقابلة لكل معلمة من معلمات الأنموذج المقترح؛ وامكانية التعبير عن النموذج العام بالصيغة الموسعة التي تسمح بالتعبير عن قيم معلمات شكل دالة الكثافة المقعرة المعبر عنها بدلالة الاخفاق، واظهار الامكانيات المتاحة التي توفرها هذه التمديدات الجديدة لتسهيل عمليات التخمين، واتاحة فرص للتطبيق الميسر في المجالات المستهدفة، وبالأخص دراسة مقدار معولية التوزيـع الاحتمالي، وتوفير المجال الميسر لاختيار الممكن المتاح من خلال صيغة دالة نموذج ويبل المفضلة.

الكلمات المفتاحية:
توزيـع ويبل، تمديد التوزيـع، نموذج التوزيـع، دالة التوزيـع، معولية وموثوقية التوزيـع، دالة الفشل، طريقة الامكان الاعظم، المواءمة، طرق التخمين المختلطة.

On-Extended Weibull Distribution and Recent New Versions of Modifications

Bachioua Lahcene, Department of Basic Sciences,
University of Hail, Hail, Saudi Arabia.

Abstract

This article presents a comprehensive and overview of the evolution of Weibull distribution of old and recent, Through the review of the most important formulas to extended model function and parameters of the Weibull distribution, in addition to the facilities provided by different formulas, in addition to the facilities offered by these new formulas. It has been investigated that the new model has functions that contribute to responding to many of the issues raised in the sensing of failure function and reliability function.

As a motivation, the statistical applications of the results based on investigates reliability properties of a flexible extended Weibull family of distributions and the mathematical properties including fitting with parameters estimation is discussed, and providing the facilitative space for the possible choice available through the Weibull model function formula.

Keywords: Flexible Weibull Extension, Weibull distribution, Model, Hazard Rate Function, Parameter estimation Methods, Failure Rates, Reliability, Fitting.

مقدمة:

ضمن نظرية الاحتمالات والإحصاء، يعتبر توزيع ويبل توزيع احتمالي مستمر اشتق اسمه من اسم العالم المهندس ولرياضياتي الفيزيائي السويدي ولودي ويبل (Waloddi Weibull) الذي عرف توزيعه في البداية على الجزء الموجب من الأعداد الحقيقية. يعتبر توزيع ويبل من التوزيعات الاساسية التي اظهرت قدرتها في اختبارات الحياة منذ ظهورها في 1939م[22] . وبدأت بعد سنوات قليلة مشكلة تعميم الصيغة العامة للتوزيع المرتبطة بشكل دالة الانموذج وعدد معلماته، حيث ظهرت منذ الدراسات الاولى لهذا التوزيع العديد من النماذج والصيغ بمعلمات مختلفة. ظهر النموذج ذو المعلمة الواحدة ولا من قبل ويبل نفسه سنة 1951 م، وقدم صيغة دالة التوزع بالشكل [21]:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = 1 - e^{-\phi(x)}, \qquad (1)$$

حيث ان دالة صيغة دالة النموذجϕ معطاة بالشكل المعبر عنه بالمقدار الجبري$\phi(x) = \frac{(x-x_0)^m}{x_0}$، تعبر$x_0$ عن قيمة الوسط الحسابي، ويشترط فبه بأن لا يكون معدوم، والمعلمة mتعبر عن المقدار الجبري الذي يحقق مقدار التحويل المعبر عنه بالصيغة الجبرية. يمكن اشتقاق دالة كثافة الاحتمال من خلال اشتقاق دالة التوزع بالنسبة للمتغير x وبهذا نحصل على الصيغة المعبر عنها بالشكل التالي:

$$f(x;\ \phi) == \phi(x)'\ e^{-\phi(x)}; \quad x \succ 0$$

وقد ورد في الابحاث المطلع عليها دالة كثافة احتمال لنموذج كانت دالة النموذج$\phi(x) = x^p$. اشارت النتيجة ان صيغة دالة الاحتمال ودالة التوزع للاحتمال للمتغير العشوائي الذي يتبع توزع ويبل ذو المعلمة والذي نعبر عنه$X \sim Weibull(p)$ والنتائج المحصل عليها هي:

$$F(x;p) = 1 - e^{-x^p}, \quad f(x;p) = px^{p-1}\ e^{-x^p}, x \succ 0, p \in IR^*$$

وهذه الصيغة الاخيرة تسمح بإيجاد دالة المواءمة بالشكل:

$$F^{-1}(u) = [-\ln(1-u)]^{\frac{1}{p}}, u \in (0,1)$$

يستخدم توزيع ويبل بشكل شائع في الميادين الصناعية من خلال تتبع نماذج بيانات الفشل، والمزايا الرئيسية لتوزيع ويبل انه يسهل عملية نمذجة المجموعات المتنوعة من البيانات، ويساهم بكفاءة وسهولة في اظهار نقاط عدم الفشل بما يسمح بتوفير حلاً بيانيًا بسيطًا ووصفًا للبيانات المستهدفة من خلال توزيع الوقت أو أي مقياس آخر من هذا القبيل على المحور الأفقي مقابل الفشل التراكمي في المئة على المحور العمودي.

1- نماذج وصيغ ويبل المعممة:

من خلال الدراسات المستعرضة، يمكن تقديم اهم الصيغ والتعديلات والنماذج المعتمدة لتوزع ويبل؛ ونبدأ:

النموذج ذو المعلمتين: ظهرت العديد من المحاولات لتطوير صيغة النموذج الاول منذ الخمسينات من القرن الماضي، وقدمت صيغة دالة التوزع الاولى المعممة بدلالة معلمتين بالشكل [17]:

$$F(x;\ \delta, p) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^p}, \qquad (2)$$

وهذا يعبر ان دالة صيغة النموذجϕ معطاة بالشكل المعبر عنه بالمقدار الجبري$\phi(x) = \left(\frac{x}{\delta}\right)^p$، حيث تعبر$\delta$ عن قيمة معلمة القياس(scale)، ويشترط فبها ان لا تكون معدومة، والمعلمة $p \succ 0$تمثل معلمة الهيئة(shape) المعبر عنه بالصيغة الجبرية. يمكن اشتقاق دالة كثافة التوزع من خلال اشتقاق دالة التوزع بالنسبة للمتغير x وبهذا نحصل على الصيغة المعبر عنها بالشكل التالي:

$$f(x;\ \delta, p) = \frac{p}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{p-1}\ e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^p}, \quad p \succ 0; \delta \in IR^*, \quad x \succ 0$$

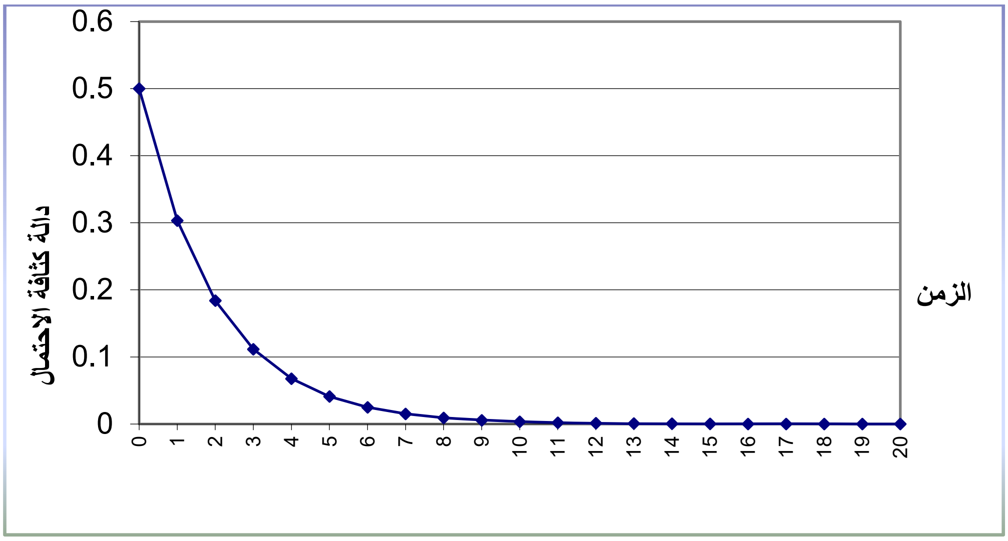
وباستخدام حسابات بسيطة نحصل على كل من التوقع والانحراف المعياري للمتغير العشوائي الذي يتبع توزع ويبل ذو المعلمتين والذي نعبر عنه$X\sim Weibull(\delta,p)$ والنتائج المحصل عليها هي:

$$E(X)=\mu=\delta\ \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right),\quad V(X)=\delta^2\ \Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)-\mu^2$$

وكحالة اساسية مهمة تم التطرق اليها في العديد من مصادر التوزيعات الاحتمالية حالة التوزيع الاسي عندما يتم تثبيت قيمة المعلمة $p=1$والتعبير عن المعلمة الأخرى بالشكل$(\delta=1/\lambda)$، وهو ما يسهل علينا التعبير عن صيغة دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاسي بدلالة معلمة واحدة(λ) في الشكل (1).

$$f(x;\ \lambda)=\lambda e^{-\lambda x},\lambda>0;\quad x>0$$

ولتوضيح صورة شكل دالة كثافة الاحتمال نستعرض شكل دالة الاحتمال عند قيمة$\lambda=1$ والموضحة في الشكل(1).



الشكل (1): دالة كثافة الاحتمال الاسي عند قيمة $\lambda=1$.

إن افتراض التوزيع الأسي هو أن احتمال وقوع حدث بنسبة فشل ثابت مع مرور الوقت يعتبر في العديد من مواقف العالم الحقيقي هذا غير دقيق لأنه غالبًا ما يزيد احتمال فشل جزء ما، على سبيل المثال، وبشكل يتناسب مع وقت الاستخدام أو التشغيل، ولهذا يعتبر توزيع ويبل هو تعميم للتوزيع الأسي الذي يمثل هذا الادعاء الرياضي المعتمد.

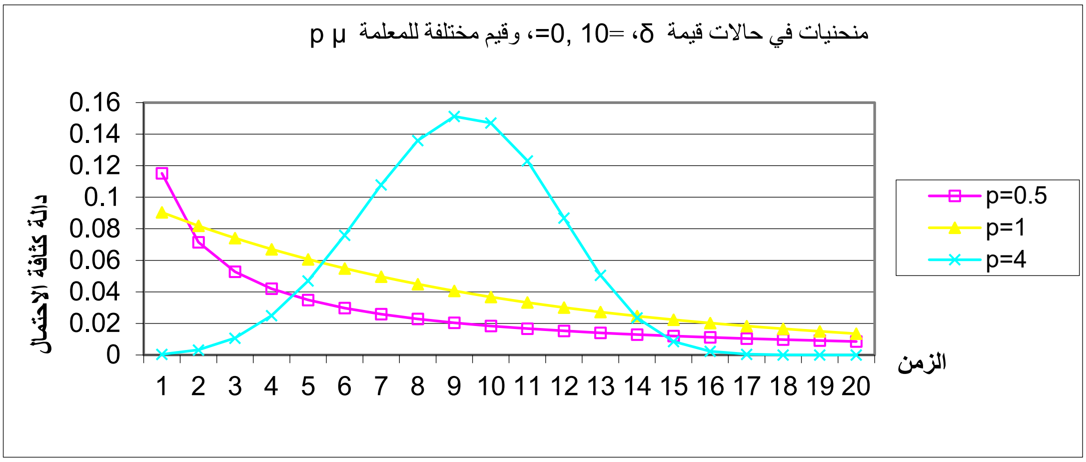
النموذج ذو ثلاث معلمات: تواصلت الدراسات والاقتراحات على النموذج ذو المعلمتين منذ نهاية الخمسينات من القرن الماضي محاولات تطوير صيغة دالة النموذج لتوزع ويبل، وتم التوصل الى تقديم صيغ مختلفة منها [11]

$$F(x;\ \delta,p,\mu)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\ dx=1-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^p},x>\mu \qquad (3)$$

وهذا يعبر ان دالة صيغة النموذجϕ معطاة بالشكل المعبر عنه بالمقدار الجبري $\phi(x)=\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^p$، تعبر δ عن قيمة معلمة الهيئة، يشترط ان لا تكون معدومة، والمعلمة $p>0$ هي معلمة القياس، وμمعلمة التموضع والمشار لهن في الصيغة الجبرية. يمكن اشتقاق دالة كثافة التوزع من خلال اشتقاق دالة التوزع بالنسبة للمتغير x وبهذا نحصل على الصيغة:

$$f(x;\ \delta,p,\mu)=\frac{p}{\delta}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p-1}e^{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^p};\quad x>0,\delta\in IR^*,p>0$$

ولأجل التوضيح عن اشكال دالة كثافة الاحتمال نرسم ثلاث حالات اساسية معبر عنها بدلالة ثلاث معلمات هي بالشكل (2). يحتوي توزيع ويبل على معلمات تعكس التغير في معدل الحدوث كدالة للوقت، وعندما يظل المعدل ثابتًا تكون توزيعات ويبل الآسية متطابقة.

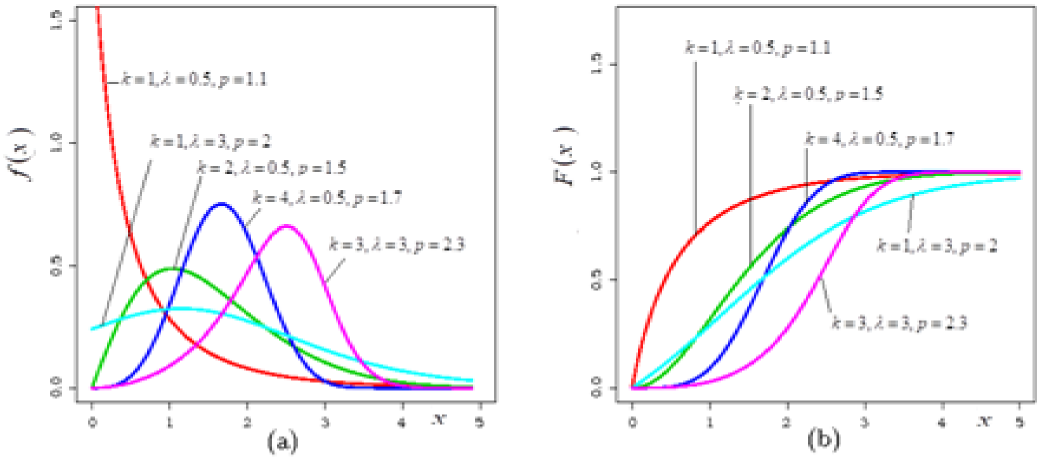


الشكل (2): دالة كثافة الاحتمال ويبل عند قيمة $\mu = 0$ ،$\delta = 10$، وقيم مختلفة $p = 0.5,1,4$

ونذكر انه عندما تكون قيمة $p = 2$ نحصل توزيع ريلايت (Rayleigh distribution) [3]. يمكن الاشارة الى وجود صيغ اخرى معبر عنها بدلالة ثلاث معلمات مصاغة بالشكل التالي:

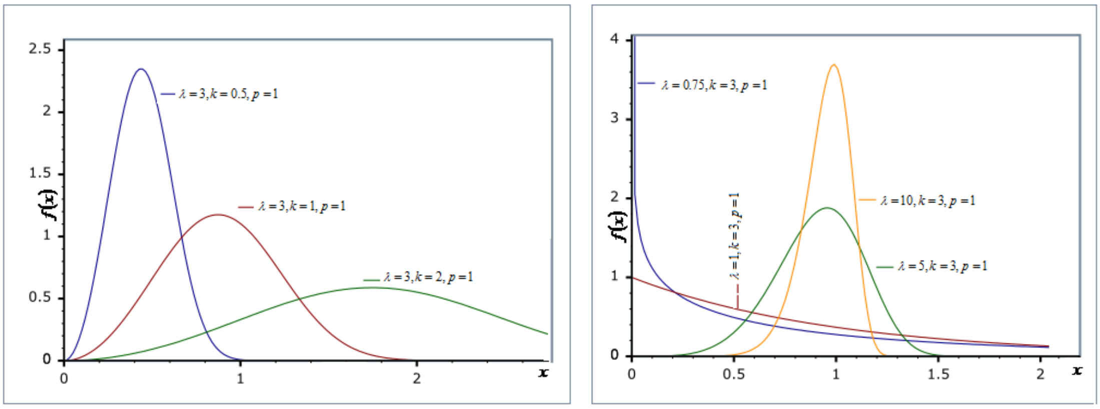
$$f(x;\ \lambda, k, p) = \frac{kp}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-p\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}}; x > 0, \lambda, k, p \in IR$$

ولأجل التوضيح نرسم خمس حالات اساسية معبر عنها بدلالة ثلاثة معلمات لكل من دالة الكثافة الاحتمالية والتوزيع ((a)،(b))، وهي موضحة بالشكل (3).



الشكل (3): دالة كثافة الاحتمال والتوزيع ((a), (b)) عند قيم مختلفة k, λ, p.

يمكن أن تأخذ دالة كثافة احتمال توزيع ويبل العديد من أشكال مختلفة؛ هذه هي الحقيقة التي تجعلها مفيدة بحيث يمكن استخدامها لتمييز أنواع كثيرة من البيانات. ولأجل التوضيح نرسم بعض التغيرات الظاهرة عند تغير معلمة الهيئة مع ثابت معلمة القياس، والحالة الثانية تغيير معلمة القياس مع ثبات معلمة الهيئة مع ثابت معلمة التموضع في الحالتين لدالة الكثافة الاحتمالية والموضحة في الشكل (4).



الشكل (4): دالة كثافة الاحتمال عند قيم مختلفة لمعلمتي القياس والهيئة.

يلاحظ ان توزيع ويبل يلائم مع اشكال متعددة من مجموعات البيانات المختلفة، ويسمح بتتبعها ومواءمتها وتقديم نتائج جيدة، حتى في حالة عينات صغيرة، وهذا هو الأهم والذي يميزه عن غيره من التوزيعات، ولهذا له استخدامات واسعة في المجالات الصناعية والموثوقية وتقييم وقت الفشل الذي تعبر عنه البيانات العملية.

النموذج ذو أربع معلمات: تواصل كيس (Kies) في1958 م الى اقتراح صيغة دالة التوزع لتوزيع ويبل بدلالة أربع معلمات بالصيغة[10] :

$$F(x;\ \lambda,\alpha,a,b) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = 1 - exp\left\{-\lambda\left[\frac{(x-a)}{(b-x)}\right]^{p}\right\} \qquad (4)$$

وهذا يعبر ان دالة صيغة النموذجϕ معطاة بالشكل المعبر عنه بالمقدار الجبري $\phi(x) = \lambda(x-a)^{p}(b-x)^{-p}$ تعبر λ عن قيمة معلمة الهيئة المتكاملة العامة، والعددين الحقيقيينa و b هما معلتين حقيقيتين يحددان فترة تواجد قيمة المتغير العشوائيين ويحددان تموضع هيكل دالة توزع الاحتمال. التموضع والمشار لهن في الصيغة الجبرية، والمعلمةp هي معلمة القياس الآسية، ويمكن اشتقاق دالة كثافة التوزع من خلال اشتقاق دالة التوزع بالنسبة للمتغيرx.

النموذج ذو خمس معلمات: قام فاني (Phani) سنة 1987م بتعميم النموذج ذو أربع معلمات الذي اقترح من قبل كيس (Kies) في 1958 م بصيغة جديدة لدالة التوزع بالشكل [19]:

$$F(x;\ \lambda,k,a,b) = 1 - exp\left\{-\lambda\frac{(x-a)^{\alpha_1}}{(b-x)^{\alpha_2}}\right\}; \qquad (5)$$

حيث ان المعلمات$0 < a \le x < b < +\infty,\ \ \lambda > 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. وهذا يعبر ان دالة صيغة النموذجϕ معطاة بالشكل المعبر عنه بالمقدار الجبري$\phi(x) = \lambda(x-a)^{\alpha_1}(b-x)^{-\alpha_2}$، تعبر λ عن قيمة معلمة الهيئة المتكاملة العامة. واماa و b معلتين حقيقيتين يحددان فترة تواجد قيمة المتغير العشوائيين ويحددان تموضع هيكل دالة توزع الاحتمال، والمشار لهن في الصيغة الجبرية، والمعلمتينα_1وα_2 هي معلمتي القياس، ويمكن اشتقاق دالة كثافة التوزع من اشتقاق دالة التوزع بالنسبة للمتغيرx.

هناك صيغة اخرى لدالة التوزع بأربعة معلمات قدمت من قبل جيونغ (Jeong) معبر عليها بالشكل [8]:

$$F(x;\ \alpha,\delta,\lambda,k) = 1 - exp\left[-\frac{\lambda^{1-k}}{k}\left\{\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\alpha} + \lambda\right\}^{k} - \frac{\lambda}{k}\right]; x > 0$$

حيث ان$\lambda > 0, \alpha > 0, \delta > 0, k \in IR$.

2- أهم التغيرات الحديثة على نماذج وصيغ ويبل المعممة:

ان المتتبع لأهم الابحاث المنجزة على توزيع ويبل والتطورات التي حدثت على تعميم وتمديد صيغة توزيع ويبل منذ الستينات من القرن الماضي؛ سيجد ما لا يقل على 4000 منجز علمي مدروس غني بالصيغ والتطبيقات على عائلة توزيع ويبل. بعد ان اظهر أنموذج توزع ويبل ذو المعلمتين التطبيقات المتعددة والمرونة في بعض التمديدات، وظهور صعوبة التخمين لمعلماته باستخدام بعض الطرق الاحصائية**[2]** . إن تعميم صيغة انموذج توزيعات ويبل سمحت بإنتاج العديد من الدوال المركبة تسمح بتهجين صيغ التخمين بالطرق المختلفة بعيدا عن صيغ التوزيعات القياسية؛ والتي أنتجت عدة توزيعات مركبة أكثر مرونة مقارنة بتوزيعات خط الأساس؛ ولأجل تحقيق هذه الغاية، بذلت العديد من المحاولات من قبل مؤلفين بارزين لاقتراح أساليب لتوليد عائلات جديدة من توزيع عائلة ويبل من خلال تمديد الصيغ او اقتراح دوال صيغة الانموذج المشار اليه سابقا[5] .

ومن بين العائلات العديدة للتوزيعات ويبل الجديدة عائلة ويبل المعممة للتوزيع المقترحة بدلالة ثلاثة أشكال مختلفة من هذه الفئة من التوزيع، والتي درست بشكل مسهب من قبل بلاكريشنان، وآخرون (Balakrishnan) [4]. سمحت عائلة ويبل المعممة بإيجاد صيغة معممة تتقاطع مع توزيع ويبل وعائلة بير الثانية عشر والتي اشار اليها الباحث نصري وآخرون (Nasiru)[13]. وقد تم تحديد واشتقاق عائلة توزيع أسي بدلالة معلمتين، وتوزيع ويبل بدلالة معلمات بصيغ مختلفة حققت نتائج عالية الدقة في الموثوقية والتحكم في حوض دالة الموثوقية. يمكن أن يكون شكل النموذج غير متكافئ أو متناقص (اعتمادا على قيمة المعلمات)، وتم مناقشة العديد من الخصائص الرياضية الأساسية للنموذج المقترح بدقة عائلة، بالإضافة الى مشتقات التوزيع الأسي الذي قدم نتائج عالية على دالة الفشل وحياة للأنظمة، وقد تم عمل مقارنة للبيانات باستخدام انموذجين وقد حقق النموذج الممدد نتائج أكثر مرونة من التوزيع السابق للتوزيع الأسي المشتق من توزيع ويبل.

3- أنموذج ويبل الممدد بالصيغة المعممة:

بعد الاطلاع على العديد من الدراسات التي تمحورت حول تمديد وتوسيع صيغة توزيع ويبل الممدد، والتطبيقات التي تلتها على هذه المقترحات؛ يرى الباحث [2] الحاجة الى اقتراح صيغة تساعد في حصر المسائل التطبيقية المتعددة لتوزيع ويبل الممدد وبدالة دالة الانموذج المعممة من خلال استخدام دالة الاخفاق والفشل، ويطرح الباحث الصيغة بالشكل:

$$F(x;\ \alpha,\beta,h) = 1 - exp\left\{-\alpha\left[\frac{h(x)}{1-H(x)}\right]^{\beta}\right\},$$

وتمثل $h(x)$ دالة الفشل المعرفة بالصيغة:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

يلاحظ من خلال تثبيت بعض الحالات ينتج النماذج المقترحة من قبل أوجنتاد وآخرون (Oguntunde)[16]:

$$\left[\frac{h(x)}{1-H(x)} = e^{\lambda x} - 1\right] ، \left[\frac{h(x)}{1-H(x)} = \frac{1-e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}}\right] ،$$

وهما يعبران بالدقة والتمدد على حالة توزيع ويبل الآسي الذي اقترح من قبل جومبرتز (Gompertz) في القرن التاسع عشر[8]. اما الحالة الثانية فقد عبر عنها الباحث قبل أوجنتاد وآخرون (Oguntunde) في بحث اخر [15]. وكحالة مهمة نأخذ دالة $h(x)$ للأنموذج توزيع ويبل ذو ثلاث معلمات لأهميته في التطبيقات الميدانية. وعليه يصبح لدينا حالة خاصة مهمة تعطي بالصيغة الكاملة لدالة التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$$F(x;\ \alpha,\beta,p,\delta,p) = 1 - exp\left\{-\alpha\left[\frac{\frac{p}{\delta}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p-1}}{1-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p}}\right]^{\beta}\right\},$$

تحققت هذه النتيجة لأنه لدينا في حالة توزيع ويبل ذو ثلاث معلمات الصيغ التالية:

$$h(x;\ \delta,p,\mu) = \frac{p}{\delta}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p-1}, \quad x > 0$$

$$H(x;\ \delta,p,\mu) = \int_{-\infty}^{x}\frac{p}{\delta}\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{p-1}dt = \left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{p}$$

يمكن اشتقاق حالات مهمة باعتماد انموذج توزيع ويبل ذو المعلمة الواحدة او المعلمتين **[2]**، وهما حالات لاشتقاق مجموعات جديدة من التوزيعات الاحتمالية المستهدفة.

5- تخمين معلمات أنموذج ويبل الممدد بالصيغة المعممة:

ان المتطلع على عائلة توزيع ويبل ومشتقاته يجد العديد من الباحثين قد ساهموا في مناقشة مسألة تقدير وتخمين معلمات عائلة توزيع ويبل بمتعدد معلماته بمختلف صيغ شكل انموذج المعتمد للتوزيع المدروس والتطبيقات المستهدفة لأجل ذلك. يلاحظ استخدم توزيع ويبل ذو المعلمتين على نطاق واسع في الهندسة ودراسة الموثوقية والاعتمادية للمنظومات الكهربائية، بالإضافة الى تحليل بيانات الحياة وتحليل الفترات الزمانية الخالية من الانهاك وعناصر الفشل، ومع ذلك، كان تقدير معلمة الموقع وحدود الثقة مسألة صعبة نوعا ما في النماذج ذات الصيغ المعيارية البسيطة**[9]** .أما في انموذج توزيع ويبل ذو ثلاثة معلمات كانت الحاجة ماسة لتخمين المعلمات الثلاثة وايجاد المخمنات التي تتميز بالصفات الاحصائية المطلوبة، ولكن لسوء الحظ في حائلة العينات صغيرة الحجم كانت المسألة تتعقد باستمرار مما استدعى البحث عن حجم العينة اللازمة لتحقيق هذه الخصائص، وهو ما تطلب الأمر بأن تكون حجم العينة كبيرة جدا للوصول الى الحالة الطبيعية والمخمنات الكفؤة، هذا الأمر استدعى من العديد من الباحثين والمهتمين الى البحث على الطرق التخمينية الفعالة، وهنا ظهرت فكرة استخدام الطرق التخمينية الهجينة.

وقد اقترحت الطرق الهجينة كنهج رياضي مهجن بديل يستند إلى طريقة رسومية بسيطة جدا وسهلة التطبيق، والتي تبين أيضا بسهولة وجود وتفرد تقديرات الاحتمال الأقصى. وعلاوة على ذلك، بالنسبة للبيانات الخاضعة للرقابة من حجم العينة الكبيرة، وهذا يسمح بالحصول على شكل مغلق لمعلمة الشكل والتي طرحت من قبل بلاكريشنان، وآخرون (**Balakrishnan**) **[4]**. سمحت الطرق المختلفة لتقدير معلمات نموذج ويبل المعممة بدلالة اربعة معلمات والنماذج المشتقة منها الى البحث على الافضل بين هذه الطرق من خلال عمل دراسات مقارنة من حيث تناسبها باستخدام متوسط الخطأ، او باستخدام مقياس كولموغوروف، ومعايير سميرنوف تسمح بتحديد افضل طريقة تحقق الاهداف التطبيقية المستهدفة من دراسة هذه النماذج، وهذا بالإضافة لاستخدام الطرق البيانية والاجراءات التحليلية ودراسات المحاكاة العددية التي تظهر الحدود القصوى لتقدير المخمنات لمعلمات انموذج ويبل المعمم وتحديد من خلالها الطرق التخمينية التي تفوق غيرها وتحقق المميزات الاحصائية القوية والكفؤة والتي ظهرت في السنوات الاخيرة وقد اشار اليها الباحث فليكس نويانيم وآخرون **[7](Felix Noyanim)**

6- مواءمة أنموذج ويبل الممدد بالصيغة المعممة:

من خلال صيغة دالة التوزيع المقترحة، نبحث على الصيغة التي تسمح لنا بمواءمة دالة التوزيع الاحتمالي من خلال وضع $F(x;\ \alpha,\beta,p,\delta,p) = u$ ، ومنه خلال الصيغة وبعد تحويرات نجد معادلة جبرية معبر عنها بالصيغة:

$$\left(1-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p}\right)\sqrt[\beta]{\frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{1}{1-u}\right)}=\frac{p}{\delta}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p-1}$$

وبإجراء تغيرات على هذه الصيغة الجبرية من خلال تغير المجهولz = $\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{p-1}$ و= $g(u,\alpha,\beta)$ $\sqrt[\beta]{\frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{1}{1-u}\right)}$ تصبح لدينا المعادلة$z(p\delta^{-1}) = (1-z^{2})g(u,\alpha,\beta)$ ، وبحل المعادلة بالنسبة للمتغيرz والتي هي من الدرجة الثانية، ثم بالنسبة للمتغيرx. يمكن مواءمة أنموذج ويبل الممدد بالصيغة المعممة المقترحة من خلال توليد القيم العشوائية للمتغير العشوائي الذي قيمه العشوائيةx ، ومنه توليد المتتالية العشوائية التي تسمح بتتبع الظواهر المستهدفة والسيطرة على الحدود الضبطية لمجالات تغير قيمة الحدود للمتغير العشوائي وبهذا تتحقق الأهداف المسطرة بقدر عال من الفاعلية والكفاءة.

7- تطبيقات تمديد توزيع ويبل المعمم وبعض الصيغ الجديدة المستحدثة:

تؤشر الدراسات المطلع عليها الى اهمية توزيع ويبل واتساع مجالات تطبيقاته الأساسية، حيث يستخدم مثلا في وصف أنواع مختلفة من الفشل للعديد من افرع نماذج الخدمة التي تعبر عن الظواهر العشوائية والظواهر، وتعطي الفرصة لتتبع مقدار دالة الموثوقية والية تحليل مقدار البقاء على العطاء وحصر قيد الحياة للأنظمة العشوائية، وقد تطرق بإسهاب الباحث شين ديو لاي وآخرون **(Chin-Diew Lai)[6]**. يسمح توزيع ويبل ايضا بتتبع معدل الخطر، والتعبير على عناصر وظيفة دالة البقاء بمقدار معدل الخطر لمتغير على نطاق صغير لمجال المتغير العشوائي، وبما يؤدي إلى اختيار نموذج مناسب يسمح بالتعديل والتتبع عبر شكل دالة الحوض لدالة الموثوقية والتعديل على الفرص ذات الصلة بدالة التنبؤ لفرص تسويق المنتجات من خلال تحليل الفارق الزمني بين الطلب والعرض، وقد أشار الى ذلك الباحث راتان داسكيبتا**(RatanDasgupta)[20]**.

ومن خلال الاطلاع على التطبيقات لعائلة توزيع ويبل يتضح ان مجال تطبيقات وضائف توزيع ويبل ممدد بمقدار اختيار دالة الانموذج المنتقاة لتمثيل الظاهرة المتبعة، بما يعطي أداة قوية للتحليل الإحصائي للظاهرة، وتم تجريب بعض النماذج البسيطة في تتبع مقدار ضبط الجودة والتي اشار اليها الباحث نيكولس **(Nichols)[14]**، وقد استخدمت ايضا في العديد من التنبؤات للأحوال الجوية، وفي تفسير بيانات التلوث البيئي لبعض الظواهر الصناعية مثل التلوث النفطي، او تتبع الحالات الجوية والتنبؤ للظواهر الطبيعية المعقدة منذ السبعينات من القرن الماضي وقد اشار الباحث بول **(Paul G)[18]**.

تسمح عملية المواءمة في الحصول على البيانات شبه العشوائية التي تخدم عملية اختيار وتفضيل القرارات المستهدفة، وايضا الاطلاع على الفرص المتاحة للتحكم في محيط الظاهرة والتقيد بضوابط الاليات المتبعة للتنبؤ بمستقبل متغيرات الحالة والاحاطة بفروعها المتشابكة. تشير نتائج هذه الدراسة ان التوسيع المستحدث لدالة الانموذج ومعلماته يتيح فرص اوسع للتطبيقات المستهدفة وبالأخص الحالات الخليطة غير النقية للظواهر الطبيعية مثل تتبع الزلازل والمفاجآت التي تحدثها الاسعار، وكل هذا متوقف على الاحاطة الكاملة بنموذج الدالة المتبع للظاهرة المدروسة.

8- المراجع:

[1] Alzaatreh, A., F. Famoye and C. Lee., (2013)."**Weibull-Pareto Distribution and Its Applications**", Commun. Stat. Theory Methods,No.(42): pp 1673-1691.

[2] Bachioua, Lahcene, (2018)."**On Recent Modifications of Extended Weibull Families Distributions and Its Applications**", Asian Journal of Fuzzy and Applied Mathematics, Vol. (6), No. (1): pp .1-12.

[3] Bachioua, Lahcene, (2018)."**On Recent Modifications of Extended Rayleigh Distribution and its Applications"**,JP Journal of Fundamental and Applied Statistics, Vol.(12), Issue (1): pp.1-13.

[4] Balakrishnan. N., and Kateri. M., (2008)."**On the Maximum Likelihood Estimation of Parameters of Weibull Distribution Based on Complete and Censored Data**", Statistics & Probability Letters, Vol. (78), No. (1), 1, December, pp 2971-2975.

[5] Bourguignon, M., R.B. Silva and G.M. Cordeiro, (2014)."**The Weibull-G Family of Probability Distributions**", J. Data Sci., No. (12): pp 53-68.

[6] Chin-Diew Lai, D.N.Murthy , and MinXie., (2006)."**Weibull Distributions and Their Applications",** pp 63-78.

[7] Felix NoyanimNwobi andChukwudi Anderson Ugomma., (2014)."**A Comparison of Methods for the Estimation of Weibull Distribution Parameters**", Metodološkizvezki, Vol (11), No(1), pp 65-78.

[8] Gompertz, B., (1825)." **On the Nature of The Function Expressive of The Law of Human Mortality and on A New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. Philos. Trans**", R. Soc. London, No (115): pp513-585.

[9] Hirose .H.,(1996)."**Maximum Likelihood Estimation in the 3-Parameter Weibull Distribution: A Look Through the Generalized Extreme-Value Distribution**", IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol.(3), No.(1), , pp. 43-55.

[10] Jeong JH., (2006)."**A New Parametric Family for Modelling Cumulative Incidence Function: Application to Breast Cancer Data"**, J.R. Statistic. Soc. A.: pp 289–303.

[11] Johnson, Norman L.; Kotz, Samuel; Balakrishnan, N., (1994)."**Continuous Univariate Distributions"**, Vol. (1), Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics (2nd ed.), New York.

[12] Kies, J., (1958)."**The Strength of Glass**", Naval Research Laboratory, Washington D.C.

[13] Nasiru, S. and A. Luguterah., (2015)."**The New Weibull-Pareto Distribution**", Pak. J. Stat. Operat. Res., No. (11): pp103-114.

[14] Nichols, M.D. and W.J. Padgett., (2006).**"A Bootstrap Control Chart for Weibull Percentiles**", Quality Reliability. Eng. Int.,No.(22): pp141-151.

[15] Oguntunde, P.E., Balogun, O.S., Okagbue, H.I. and Bishop, S.A., (2015)."**The Weibull-Exponential Distribution: Its Properties and Applications**", Journal of Applied Sciences, Vol (15), No (11): pp 1305-1311.

[16] Oguntunde, P.E. and A.O. Adejumo., (2015)."**The Generalized Inverted Generalized Exponential Distribution with an Application to a Censored Data**", J. Stat. Applic. Probabil., No (4): pp223-230.

[17] Papoulis, A, Thanasios Papoulis and Pillai, S. Unnikrishna., (2002)."**Probability, Random Variables, and Stochastic Processes"**, (4th ed.). Boston: McGraw-Hill.

[18] Paul G. Mikolaj., (1972)."**Environmental Applications of the Weibull Distribution Function: Oil Pollution**", Science 02 Jun, Vol. 176, Issue 4038, pp. 1019-1021.

[19] Phani, K. K., (1987)."**A New Modified Weibull Distribution Function**", Communications of the American Ceramic Society, No (70), pp 182–184.

[20] RatanDasgupta., (2014)."**Characterization Theorems for Weibull Distribution with Applications**", Journal of Environmental Statistics, August, Volume 6, Issue 4, pp. 1-25.

[21] Wallodi Weibull., (1951)."**A Statistical Distribution Function of Wide Applicability**", ASME Journal of Applied Mechanics, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, September, pp 293-297.

[22] Waloddi Weibull., (**1939**)."**A Statistical Theory Of The Strength Of Materials**",Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar, Generals tabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm Nr 151.