

مقارنة تقديرات طريقتي (ML&WLS) لبعض نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة

د. خالد ضاري الطائي

م. علي بندر نعيمة

قسم الإحصاء - كلية الاداره والاقتصاد - جامعه بغداد

الخلاصة :

نموذج قانون القوة Power Law Model و نموذج القانون الأسي Exponential Law Model كدالة لمعدل زمني لحدوث الحدث، وتم استخدام المحاكاة (Simulation) للمقارنة بين طريقتي التقدير بهدف الوصول إلى أفضل طريقة. وتم التوصل إلى أن طريقة الإمكان الأعظم هي أفضل من طريقة المربعات الصغرى الموزونة في تقدير دالة قانون القوة (النموذج الأول) بينما طريقة المربعات الصغرى الموزونة أفضل نسبياً في تقدير معاملات نموذج القانون الأسي (النموذج الثاني) من طريقة الإمكان الأعظم. وتضمنت الرسالة أيضاً تطبيقاً عملياً تناول ظاهرة سقوط الأمطار في محافظتي بغداد والبصرة وتم تقدير المعدلات الزمنية لسقوط الأمطار في المحافظتين قيد الدراسة. حيث أظهرت النتائج بأن المعدل الزمني لسقوط الأمطار في المحافظتين في تناقص مستمر بمرور الزمن، للبيانات قيد الدراسة.

تعد العملية البواسونية غير المتجانسة من الموضوعات الإحصائية المهمة وذلك لكثرة تطبيقاتها في المجالات العلمية ومنها أنظمة الاتصالات والتطبيقات الهندسية ونظرية صفوف الانتظار ونظرية المعولية والأنظمة القابلة للإصلاح، فضلاً عن الظواهر الطبيعية التي تحدث في أوقات غير منتظمة، والتي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحدث (نسبة الحدوث) متغيراً مع الزمن.

تضمن الجانب النظري من هذا البحث التطرق إلى تعريف عملية العدّ وعملية بواسون المتجانسة وخصائصها بالإضافة إلى الاشتقاقات الخاصة بتقدير معاملات النموذجين بطريقة المربعات الصغرى الموزونة وطريقة الإمكان الأعظم، وعرض الاحوازمية الخاصة بتوليد بيانات تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP). تم اختيار نموذجين من نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة، وهما

ABSTRACT

The Non Homogeneous Poisson process is considered as an important statistics subjects because of its many applications in Scientific scope such as communications systems, engineering, theory of waiting times, theory of reliability, reparability systems in addition to the natural phenomenon which occurs in irregular times in which the rate of time of occurrence is changeable.

Two models of Non Homogeneous Poisson process is used such as power Law Model and Exponential Law Model as an indication of the rate of time of the occurrence of event, also the Simulations is used to compare between the ways of assessment in aim of reaching to the best method.

As a result, it has reached to that the Method Maximum Likelihood is rather than the method of the Weighted Least Squares in estimation of the reference of Power Law (First Model) and the method of Weighted Least Squares is ratherly better in parameter estimation of Exponential Law Model (second model).

The Thesis also included a practical application which deals with the phenomenon of rain falling in the cities of Baghdad & AL Basrah. The estimating of time rates of rain falling in the two cities is still under research. It is reached to that the time rates of rain in this two cities in a continuous decrease with time.

1. المقدمة:

لخط الانتظار كعدد السيارات التي تنتظر على محطة تعبئة الوقود أو عدد المرضى في عيادة طبيب أو عدد السيارات في ورشة تصليح. ومن تطبيقات نظرية المُعولية هي الأنظمة القابلة للإصلاح والتي تعني أن النظام الذي يحدث فيه فشل، يمكن إعادته للعمل بإصلاح بعض مكوناته دون الحاجة إلى إبدال النظام بالكامل ومن أمثلة ذلك أنظمة التنفس الاصطناعي المستخدمة في غرف العمليات وغرف العناية المركزة في المستشفيات، وكذلك أنظمة مراقبة عمل المحركات للسيارات والطائرات، وأنظمة الاتصالات وأنظمة الحاسوب.

2. هدف البحث

إن الهدف الرئيس لهذا البحث هو المقارنة ما بين اثنتين من طرائق تقدير نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP) وهما طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) وتحديد أي الطريقتين ستكون أفضل لتقدير معلمات النموذجين، ويتم ذلك من خلال استخدام مقياسين للمقارنة: متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق

إن العملية البواسونية التي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث (نسبة الحدوث) $\lambda(t)$ هو كمية ثابتة لكل قيم t ، أي أنها لا تتأثر بالزمن t في سلوكها، تسمى عملية بواسونية متجانسة

Homogeneous Poisson Process

بنسبة حدوث λ . أما إذا كان المعدل الزمني لحدوث الحوادث $\lambda(t)$ متغيراً في t ، أي أنها تتأثر بالزمن لكل قيم سلوكها، فإنها تسمى عملية بواسونية غير متجانسة

Non Homogeneous Poisson Process.

ومن هنا تأتي أهمية دراسة هذا الموضوع لما له من تطبيقات واسعة في الكثير من المجالات العلمية ولاسيما مجالات أنظمة الاتصالات والمجالات الهندسية ونظرية صفوف الانتظار ونظرية المُعولية والأنظمة القابلة للإصلاح وغيرها الكثير من الظواهر التي يرتبط حدوثها بتغير الزمن.

ويمكن تأشير اتجاهين رئيسيين في تطبيقات عملية بواسون غير المتجانسة (NHPP)

هما نظرية صفوف الانتظار ونظرية المُعولية ومن أمثلة تطبيقات نظرية صفوف الانتظار هي نموذج عدد الواصلين

4. نموذج قانون القوة

Power Law Model [8] [7] [5]

في عام 1964 اقترح الباحث (Duane) نموذجاً يسمى قانون القوة، كدالة للمعدل الزمني للحدث بمعلمتين α و β والدالة :-

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} \dots\dots(3)$$

وأن دالة الشدة التراكمية لقانون القوة هي:

$$\Lambda(t) = \alpha t^{\beta} \dots\dots(4)$$

حيث إن :

$$\alpha, \beta > 0$$

$$t \geq 0$$

α تمثل معلمة القياس

(Scale Parameter)

β تمثل معلمة الشكل

(Shape parameter)

5. نموذج القانون الأسّي Exponential

Law Model [8] [5]

في عام 1966 اقترح الباحثان (Cox and Lewis) دالة لاخطية (أسية) كمعدل زمني للحدث والدالة هي :-

$$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t} \dots\dots(5)$$

$$-\infty < \alpha, \beta < \infty$$

$$t \geq 0$$

حيث إن دالة الشدة التراكمية هي :-

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha}(e^{\beta t} - 1)}{\beta} & \text{if } \beta \neq 0 \\ t e^{\alpha} & \text{if } \beta = 0 \end{cases} \dots\dots(6)$$

(MAPE) بهدف الوصول إلى أفضل

طريقة لتقدير معلمات كل نموذج، بالإضافة إلى ذلك يهدف البحث إلى تقدير المعدل الزمني لظاهرة سقوط الأمطار في محافظتي بغداد والبصرة.

3. عملية بواسون غير المتجانسة

Non Homogeneous Poisson Process [12] [11] [9]

عملية العد $\{N(t), t \geq 0\}$ يقال لها

عملية بواسون غير المتجانسة (NHPP)

بدالة شدة $\lambda(t)$, $t \geq 0$ إذا توافرت الشروط الآتية :-

(i) عدد الحوادث بالزمن صفر يساوي

$$N(0) = 0 \text{ صفرًا}$$

(ii) العملية لها زيادات مستقلة وغير مستقرة

$$\{N(t), t \geq 0\}$$

(iii) احتمال حدوث أكثر من حادثة في

المدة الزمنية h يقترب من الصفر

$$N(t+h) - N(t) \geq 2 = O(h)$$

احتمال حدوث حادثة واحدة خلال الزمن h

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + O(h)$$

وبذلك تكون العملية البواسونية $\{N(t), t \geq 0\}$

تتبع توزيع بواسون بدالة كتلة

احتمالية هي :-

$$p\{N(t+s) - N(t) = n\} =$$

$$(e^{-m(t)}) \frac{[m(t)]^n}{n!}, n \geq 0 \dots(1)$$

وفي ظل فرضية عدم تجانس التباين يستوجب ضرب طرفي المعادلة (8) بـ

$$\sqrt{w_i}$$

$$y_i \sqrt{w_i} = \alpha^* \sqrt{w_i} + \beta \sqrt{w_i} X_i \dots\dots\dots (9)$$

يتضح من النموذج أعلاه أنه أصبح لدينا متغيران مستقلان الأول يتمثل بـ $(\sqrt{w_i})$ والثاني $\sqrt{w_i} X_i$ أما المتغير المعتمد فيتمثل بالحد

$$y_i \sqrt{w_i}$$

مثل هذا الإجراء يعني استبعاد أثر عدم تجانس التباين من هذا النموذج وبالتالي يمكن تقدير معالمه بتطبيق طريقة (OLS) على متغيرات النموذج الذي تم استبعاد أثر عدم تجانس التباين منها أو اتباع أسلوب المربعات الصغرى الموزونة (WLS) [2].

$$\sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i - y_i)^2 = \min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum_{i=1}^n w_i (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i - y_i)^2 \dots\dots\dots (1)$$

والمقداران $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ هما مقدرا المربعات

الصغرى الموزونة للمعلمتين α , β وكما هو معروف فإن هذين المقدرين يمكن إيجادهما من خلال المعادلتين الآتيتين :-

$$\hat{\alpha} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i X_i^2) (\sum_{i=1}^n y_i w_i) - (\sum_{i=1}^n w_i X_i) (\sum_{i=1}^n w_i y_i X_i)}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i X_i^2) - (\sum_{i=1}^n w_i X_i)^2} \dots\dots\dots (2)$$

6 . تقديرات المربعات الصغرى الموزونة

1-6 تقدير معاملات نموذج قانون القوة [1] [6]

Estimation Parameter of Power Law Model

تعد طريقة المربعات الصغرى الموزونة من الطرائق المعروفة في تقدير معاملات عمليات بواسون غير المتجانسة، لو أخذنا اللوغاريتم الطبيعي للدالة في الصيغة (4) نحصل على :

$$\ln[\Lambda(t_i)] = \ln \alpha + \beta \ln t_i \dots\dots\dots (7)$$

وعليه لو فرضنا المقادير الآتية [crow,1974]

$$y_i = \ln[\Lambda(t_i)]$$

$$\alpha^* = \ln \alpha$$

$$X_i = \ln t_i$$

وفرضنا أن مجموعة البيانات هي أزواج من قيم (X_i, y_i) وطبقا لمبدأ المربعات الصغرى الذي يقلل من المسافة العمودية بين نقاط البيانات والخط المستقيم الملائم لهذه البيانات، فإن أفضل خط مستقيم ملائم لهذه البيانات هو الذي تمثله المعادلة الآتية

$$y_i = \alpha + \beta X_i \dots\dots\dots (8)$$

المستقيم الملائم لهذه البيانات فإن أفضل خط مستقيم ملائم لهذه البيانات هو المستقيم الذي تمثله المعادلة الآتية :

$$y_i = \alpha + \beta x_i \dots \dots (16)$$

وفي ظل فرضية عدم تجانس التباين يستوجب ضرب طرفي المعادلة (16) بـ $(\sqrt{w_i})$.

$$y_i \sqrt{w_i} = \alpha \sqrt{w_i} + \beta \sqrt{w_i} x_i \dots \dots (17)$$

حيث إن المقدرين α و β يمكن إيجادهما من خلال المعادلتين الآتيتين:-

$$\hat{\alpha} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i x_i^2) (\sum_{i=1}^n y_i w_i) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i) (\sum_{i=1}^n w_i y_i)}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i x_i^2) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i)^2} \dots \dots (18)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i y_i x_i) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i) (\sum_{i=1}^n y_i w_i)}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i x_i^2) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i)^2} \dots \dots (19)$$

وبالتعويض عن قيم كل من x_i و y_i بما و يقابلها

$$\hat{\alpha} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2) (\sum_{i=1}^n \ln[\lambda(t_i)] w_i) - (\sum_{i=1}^n w_i t_i) (\sum_{i=1}^n w_i \ln[\lambda(t_i)] t_i)}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i^2) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i)^2} \dots \dots (20)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i y_i x_i) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i) (\sum_{i=1}^n y_i w_i)}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i x_i^2) - (\sum_{i=1}^n w_i x_i)^2} \dots \dots (1)$$

بالتعويض عن قيم x_i و y_i و α بما يقابلها نحصل :

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i) \ln(\Lambda(t_i)) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i) (\sum_{i=1}^n w_i \ln(\Lambda(t_i)))}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i (\ln t_i)^2) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i)^2} \dots \dots (13)$$

$$\ln \alpha = \frac{(\sum_{i=1}^n w_i (\ln t_i^2)) (\sum_{i=1}^n (\ln(\Lambda(t_i)) w_i)) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i) (\sum_{i=1}^n \ln(\Lambda(t_i)) w_i (\ln t_i))}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i (\ln t_i)^2) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \exp\left\{ \frac{(\sum_{i=1}^n w_i (\ln t_i^2)) (\sum_{i=1}^n (\ln(\Lambda(t_i)) w_i)) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i) (\sum_{i=1}^n \ln(\Lambda(t_i)) w_i (\ln t_i))}{(\sum_{i=1}^n w_i) (\sum_{i=1}^n w_i (\ln t_i)^2) - (\sum_{i=1}^n w_i \ln t_i)^2} \right\} \dots (14)$$

6-2 تقدير معلمات نموذج

القانون الأسّي Estimation Parameter of Exponential Law Model

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة القانون الأسّي في الصيغة (5) نحصل على :

$$\ln[\lambda(t_i)] = \alpha + \beta t_i \dots \dots (15)$$

عليه لو فرضنا المقادير الآتية :
 $y_i = \ln[\lambda(t_i)]$

$$x_i = t_i$$

وفرضنا أن مجموعة البيانات هي أزواج من قيم (x_i, y_i) وطبقا لمبدأ المربعات الصغرى الذي يقلل المسافة بين نقاط البيانات والخط

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\beta-1} \exp[-\alpha(t_i)^\beta]$$

$$L = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \exp[-\alpha(t_i)^\beta] \quad \dots\dots(24)$$

ولغرض تقدير دالة الإمكان الأعظم يجب تحويلها إلى الشكل الخطي وذلك من خلال أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (24) نحصل على

$$\ln L = n \ln \alpha + n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln t_i^{\beta-1} - \alpha t_n^\beta \quad \dots\dots(25)$$

ولإيجاد القيم التقديرية لكل من معلمة الشكل والقياس التي تجعل دالة الإمكان الأعظم أقل ما يمكن، ويتم ذلك من خلال حساب النهايات العظمى للدالة (25) وعلى النحو الآتي :-

نجد المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة (25) بالنسبة لكل من α , β ومن خلال مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر نحصل على النقطة الحرجة ويمكن التحقق بسهولة من أن المشتقات الثانية هي سالبة وبذلك تكون النقاط الحرجة نهايات عظمى.

7 . تقديرات طريقة الإمكان الأعظم

Method Of Maximum Likelihood

1-7 تقدير معلمات نموذج قانون القوة

[14] [3] [1] [4]

Estimation Parameter of Power Law Model

إن دالة الشدة المشتركة لأزمنة الحدث

$$(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \exp[-\int_0^t \lambda(u) du] \quad \dots\dots(22)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_0^t \lambda(u) du \\ &= \int_0^t \alpha \beta u^{\beta-1} du \\ &= \alpha \beta \left[\frac{u^\beta}{\beta} \right]_0^t \end{aligned}$$

وإن دالة الشدة التراكمية

$$\Lambda(t) = \alpha t^\beta \quad \dots\dots(23)$$

وبتعويض المعادلتين (3) و(23) في دالة الشدة المشتركة لأزمنة الحدث نحصل على:

غيرالمتجانسة لو افترضنا أنَّ عملية العدِّ {N(t), t ≥ 0} والتي تمثل العدد

المتراكم (المتجمع) من الحوادث التي تحدث في المدة الزمنية (0 , tn] هي عملية بواسون غير المتجانسة بمعدل زمني للحدوث λ(t) ويتضمن :

$$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}$$

لذا لو افترضنا أنَّ حوادث العملية البواسونية غير المتجانسة تحدث ضمن المدة الزمنية (0 , tn]، تحدث في الأوقات:

$$(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

حيث إنَّ

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$$

لذا فإن معلمة عملية بواسون غير المتجانسة والتي تمثل الدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث m(t) ستكون بالشكل الآتي :

$$m(t) = \int_0^{t_n} e^{(\alpha + \beta u)} du$$

$$m(t) = \int_0^{t_n} e^{\alpha} e^{\beta u} du$$

$$m(t) = e^{\alpha} \int_0^{t_n} e^{\beta u} du$$

$$m(t) = e^{\alpha} \left[\frac{e^{\beta t_n}}{\beta} - 1 \right]$$

$$\ln L = n \ln \alpha + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha t_n^{\beta}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - t_n^{\beta} = \frac{n - \alpha t_n^{\beta}}{\alpha} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{t_n^{\beta}} \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha t_n^{\beta} \ln t_n = \frac{n + \beta \sum_{i=1}^n \ln t_i - \alpha \beta t_n^{\beta} \ln t_n}{\beta} \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n + \beta \sum_{i=0}^n \ln t_i - \alpha \beta t_n^{\beta} \ln t_n}{\beta} = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\alpha t_n^{\beta} \ln t_n - \sum_{i=1}^n \ln t_i}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n \ln t_n - \sum_{i=1}^n \ln t_i}$$

...(29)

2-7 تقدير معلمات نموذج القانون

Estimation Parameter الأسّي of Exponential Law Model [2]

إنَّ تقدير المعدل الزمني يكون بمثابة تقدير المعلمات الموجودة في نموذج الدالة التي تم اختيارها لتمثل دالة المعدل الزمني لحدوث الحوادث في عمليات بواسون

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = n - \frac{e^{\alpha} (e^{\beta t_n} - 1)}{\beta}$$

$$n = \frac{e^{\hat{\alpha}} (e^{\beta t_n} - 1)}{\beta}$$

$$e^{\hat{\alpha}} = \frac{n\beta}{(e^{\beta t_n} - 1)} \dots\dots(31)$$

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي

(31) المعادلة نحصل على مقدر الإمكان

الأعظم للمعلمة α

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n t_i - \frac{nt_n}{(1 - e^{-\beta t_n})} + \frac{n}{\beta} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i - \beta(1 - e^{-\beta t_n}) - n\beta t_n + n(1 - e^{-\beta t_n})}{\beta(1 - e^{-\beta t_n})} \end{aligned}$$

= 0

$$\sum_{i=1}^n t_i - \beta(1 - e^{-\beta t_n}) - n\beta t_n + n(1 - e^{-\beta t_n}) = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{n(1 - e^{-\beta t_n})}{nt_n - \sum_{i=1}^n t_i(1 - e^{-\beta t_n})} \dots\dots\dots(33)$$

وإن دالة الإمكان الأعظم للعملية البواسونية غير المتجانسة ذات المعدل الزمني للحدث

هي :-

$$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}$$

$$L = \prod_{i=0}^n \lambda(t_i) e^{-m(t)}$$

$$L = \prod_{i=0}^n e^{(\alpha + \beta t_i)} e^{-e^{\alpha} \frac{e^{\beta t_n} - 1}{\beta}}$$

$$L = e^{(\alpha n + \beta \sum_{i=0}^n t_i)} e^{-e^{\alpha} \frac{e^{\beta t_n} - 1}{\beta}}$$

حيث إن n تمثل عدد الحوادث التي

تحدث في الفترة الزمنية $(0, t_n]$ و إن

اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم

هو :

$$\ln L = \alpha n + \beta \sum_{i=1}^n t_i - e^{\alpha} \left[\frac{e^{\beta t_n}}{\beta} - 1 \right] \dots\dots\dots(30)$$

ويمكن إيجاد مقدرات معلمتي المعدل

الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير

المتجانسة وهما α ، β ، ويتم ذلك عن

طريق إيجاد المشتقة الأولى للمعادلة أعلاه

بالنسبة لتلك المعلمات ومن ثم مساواتها

بالصفر .

9. اختبار تجانس العملية البواسونية [2]**Test of the Homogeneity of Poisson Process**

إن العملية البواسونية إذا كان فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث (نسبة الحدوث) $\lambda(t)$ هو كمية ثابتة لكل قيم t ، أي أنها لا تتأثر بالزمن t في سلوكها، فإنها تسمى عملية بواسونية متجانسة

(Homogeneous Poisson Process)

بنسبة حدوث λ . أما إذا كان المعدل الزمني لحدوث الحوادث $\lambda(t)$ غير ثابت لكل قيم t ، أي أنها تتأثر بالزمن t في سلوكها، بذلك تسمى عملية بواسونية غير متجانسة

Non Homogeneous Poisson Process.

وبما أن المعدل الزمني لحدوث الحوادث هنا هو نموذج قانون القوة المتمثل بالصيغة (19-2)، حيث أننا نجد أن المعلمة β مقترنة بالزمن t ، وبذلك فإن العملية البواسونية تكون متجانسة في حالة $\beta=1$ ، وغير متجانسة في حالة $\beta \neq 1$ ، وبناءً على ذلك، فإنه لإجراء اختبار فيما إذا كانت العملية البواسونية هي متجانسة أم لا، فإننا نختبر الفرضيتين الآتيتين:

8. محاكاة عملية بواسون غير**المتجانسة Non Homogeneous Poisson process Simulation Of [10]**

في هذا البحث تم استخدام طريقة الرفض لتوليد بيانات تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة :-

Algorithm of NHPP (Rejection Method)

Step 1:

Set $T_0=0$ and $T^*=0$

Step 2:

For $i=1, 2, 3 \dots n$ do

Step 2a:

Generate an exponential random variable E with intensity $\bar{\lambda}$

Step 2b:

Set $T^* = T^* + E$

Step 2c:

Generate a random variable U distributed uniformly on $(0, 1)$

Step 2d:

$$IF \quad U > \frac{\lambda(T^*)}{\bar{\lambda}}$$

Then return to step 2a (\rightarrow reject the arrival time) else set

$T_i = T^*$

(\rightarrow Accept the arrival time) then return to step 2

10 . أساليب المقارنة بين طرائق التقدير

المستخدمة

و تم حساب المقدرات للمعلمات باستخدام الطرائق التي عرضت في الفصل الثاني، ومن ثم حسبت المعايير الآتية للمقارنة بين طرائق التقدير وهي :-

1 - متوسط مربعات الخطأ (MSE)

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^R (\hat{\theta} - \theta)^2}{R} \dots (34)$$

2 - متوسط الخطأ النسبي المطلق

(MAPE)

$$MAPE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^R \left| \frac{\hat{\theta} - \theta}{\theta} \right|}{R} \dots (35)$$

حيث إن R يمثل عدد مرات تكرار التجربة. وان المقياس الأول هو مقياس مطلق للمقارنة بين المقدرات. أما المقياس الثاني فهو نسبي يستخدم لدقة القياسات في حالة كون المجتمعات مختلفة وللمقارنات الدقيقة [3].

11 . المحاكاة :-

إن استخدام أسلوب المحاكاة يلعب دوراً مهماً في معالجة الكثير من المشكلات والمعضلات. ولاسيما بعد التطور الهائل

$$\begin{aligned} H_0: \beta=1 & \quad H_0: HPP \\ H_1: \beta \neq 1 & \quad \text{OR} \quad H_1: NHPP \end{aligned}$$

عندما يكون المعدل الزمني لحدوث الحوادث هو الدالة الأسية المتمثلة بالصيغة (25-2) حيث إننا نجد أن المعلمة β مقترنة بالزمن t وبذلك فإن العملية البواسونية تكون متجانسة في حالة $\beta=0$ وغير متجانسة في حالة $\beta \neq 0$ وبناءً على ذلك فإنه لإجراء اختبار فيما إذا كانت العملية البواسونية متجانسة أم لا فإننا نختبر الفرضيتين الآتيتين :-

$$\begin{aligned} H_0: \beta=1 & \quad H_0: HPP \\ H_1: \beta \neq 1 & \quad \text{OR} \quad H_1: NHPP \end{aligned}$$

وان إحصاء الاختبار للفرضيات أعلاه [2]

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n t_i / n - t_n / 2}{t_n \sqrt{1/12n}} \dots (33)$$

حيث إن :-

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i : \text{ تمثل مجموع أوقات حدوث}$$

الحوادث للمدة الزمنية $(0, t_n]$

n: تمثل عدد الحوادث التي تحدث في

المدة الزمنية $(0, t_n]$

t_n: مثل المدد البينية المتراكمة بين حدوث

الحوادث.

الطريقة إذ إنه من المتعذر في معظم الدراسات دراسة المجتمع بأكمله مما يحتم استخدام طريقة المعاينة في دراسة هذا المجتمع لتبرز هنا مشكلة هل العينة المختارة ستمثل المجتمع المدروس أحسن تمثيل، بينما في أسلوب المحاكاة يمكن استخدام أكثر من عينة واحدة بل مجموعة عينات لتمثل المجتمع أو النظام المطلوب دراسته، ومن الطبيعي أن استخدام أكثر من عينة واحدة سيؤدي إلى دراسة مختلف ظروف وتفاصيل المجتمع الإحصائي أكثر مما لو استخدمت عينة واحدة، ومن ناحية أخرى قد يتعذر الحصول على بيانات وقيم حقيقية للمشكلة المدروسة فيكون هذا الأسلوب أسلوباً فاعلاً ومفيداً في توفير مثل هذه البيانات.

ومن أهم طرائق المحاكاة وأكثرها شيوعاً في التحليل هي طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) التي تستعمل في توليد مشاهدات لمعظم التوزيعات الاحتمالية المعروفة.

لقد تم بناء أنموذج المحاكاة لإجراء المقارنة ما بين الطريقتين المدروستين (MLE & WLS) بحيث يمكن افتراض العديد من الحالات بهدف الوصول إلى تحديد أي الطريقتين تكون أفضل لتقدير معاملات النموذجين للظواهر التي تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP). ويتم

في مجال الحاسبات الإلكترونية مما حدا بالكثير من الباحثين إلى اعتماده في الكثير من البحوث التي تهدف إلى دراسة سلوك أية مقدرات أو توزيعات أو نماذج إحصائية.

ويمكن تعريف المحاكاة بأنها تقليد أو تمثيل للواقع من خلال استخدام أو تصميم نماذج معينة للنظام الحقيقي ومتابعة تنفيذ التجربة للتعرف على مخرجات هذا النظام [1].

وتقوم فكرة المحاكاة على أساس بناء أنموذج المحاكاة ومن ثم إجراء التجارب التي تسمح في كل مرة بتغيير المدخلات المعطاة وتمنح شرحاً لطبيعة العملية الرياضية المستخدمة لأجل إجراء التغيرات اللازمة واختبار المدخلات التي تعطي أفضل النتائج. وتتميز المحاكاة أيضاً بالعشوائية إذ إن تتابع الأرقام العشوائية المستخدمة للأنموذج الرياضي في التجربة الأولى يكون مستقلاً عن تتابع الأرقام العشوائية في التجربة الثانية وهكذا.

كما أن طرائق المحاكاة تستخدم في الجوانب الإحصائية لغرض دراسة النموذج من خلال إعداد برنامج يمكن تنفيذه باستخدام الحاسوب لتوليد مجموعة من العينات ممثلة لقياسات الأداء الحقيقية، لذا يمكن اعتباره طريقة من طرائق المعاينة للنظام الواقعي ومن هنا تتأتى أهمية هذه

2 - من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن متوسطات الخطأ النسبي المطلق لتقديرات المعلمة α بطريقة (MLE) أقل من متوسطات الخطأ النسبي المطلق لتقديرات المعلمة α بطريقة (WLS) والجدول (4) يوضح أفضلية التقدير بين الطريقتين باستخدام مقياس الخطأ النسبي المطلق والذي يبين بأن طريقة (MLE) أفضل من طريقة (WLS) في تقدير معلمة القياس α الخاصة بالنموذج الأول ولمختلف أحجام العينات.

جدول (4)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MAPE) لتقدير معلمة القياس α للنموذج الأول

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
MLE	17
WLS	3

3- من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن متوسطات مربعات الخطأ (MSE) لتقديرات معلمة الشكل β للنموذج

ذلك من خلال توضيح كيفية تأثير النموذجين وطريقتي التقدير، بتغير حجم العينة والتغير في قيم المعلمات للنموذجين. 1- من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن متوسطات مربعات الخطأ (MSE) لتقديرات معلمة القياس α بطريقة الإمكان الأعظم (MLE) أصغر من متوسطات مربعات الخطأ بطريقة (WLS) أي أن طريقة (MLE) تكون أفضل من طريقة (WLS) في تقدير معلمة القياس α للنموذج الأول.

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية في تقدير معلمة القياس α للنموذج الأول في الجدول (3)

جدول (3)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MSE) لتقدير معلمة القياس α للنموذج الأول

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
MLE	15
WLS	5

المربعات الصغرى الموزونة بعبارة أخرى إن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) أفضل من طريقة (WLS) في تقدير هذه المعلمة. وإن الجدول (8) يوضح الأفضلية بين الطريقتين في تقدير معلمة الشكل β للنموذج الأول.

جدول (8)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MAPE) لتقدير معلمة الشكل β للنموذج الأول

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
MLE	17
WLS	3

5- من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن متوسطات مربعات الخطأ (MSE) لتقديرات معلمة القياس α بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) أصغر من طريقة الإمكان الأعظم (MLE) والجدول (11) يبين أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المؤشر الإحصائي (MSE).

الأول بطريقة الإمكان الأعظم (MLE) تكون أصغر من متوسطات مربعات الخطأ بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)، أي أن التقدير بطريقة (MLE) أفضل من التقدير بطريقة (WLS).

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية في التقدير باستخدام مقياس (MSE) في الجدول (7).

جدول (7)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MSE) لتقدير معلمة الشكل β للنموذج الأول

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
MLE	15
WLS	5

4- من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن تقديرات متوسطات الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لمعلمة الشكل β بطريقة الإمكان الأعظم هي أصغر من تقديرات متوسطات الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لمعلمة الشكل β بطريقة

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية باستخدام المقياس (MAPE) في الجدول (12).

جدول (12)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MAPE) لتقدير معلمة القياس α للنموذج الثاني

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
WLS	11
MLE	9

من خلال تجربة المحاكاة ظهر بأن متوسطات مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معلمة الشكل β للنموذج الثاني بطريقة (WLS) أصغر من متوسطات مربعات الخطأ بطريقة (MLE).

وهذا يعني أن التقدير بطريقة المربعات الصغرى أفضل من طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معلمة القياس للنموذج الثاني ولمختلف أحجام العينات (200, 250, 100, 50).

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية لطريقتي التقدير باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) في الجدول (15).

جدول (11)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس (MSE) لتقدير معلمة القياس α للنموذج الثاني

الثاني

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
WLS	13
MLE	7

6- من خلال تجربة المحاكاة يمكن توضيح النتائج الخاصة بمتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق وكما يأتي :-

أ- إن متوسطات الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لمقدرات معلمة القياس α للنموذج الثاني بطريقة (MLE) أصغر من متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (WLS) ولحجمي العينة (25, 50).

ب- إن متوسطات الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لمقدرات معلمة القياس α للنموذج الثاني بطريقة (WLS) أصغر من متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (MLE) ولحجوم العينات (100, 200, 250).

جدول (15)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس
(MSE) لتقدير معلمة الشكل β للنموذج

الثاني

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
WLS	14
MLE	6

جدول (16)

أفضلية طريقتي التقدير باستخدام المقياس
(MAPE) لتقدير معلمة الشكل β للنموذج

الثاني

طريقة التقدير	عدد مرات الأفضلية
WLS	12
MLE	8

13 . تطبيق عن ظاهرة الأمطار في محافظة بغداد والبصرة

تعد عمليات بواسون غير المتجانسة من العمليات التي تستخدم لنمذجة الظواهر العشوائية ولاسيما تلك التي تعتمد على الزمن في حدوثها، حيث تعد ظاهرة سقوط الأمطار من الظواهر التي يمكن نمذجة بياناتها بواسطة عمليات بواسون غير المتجانسة. حيث يمكن القول إن عمليات بواسون غير المتجانسة تكون ملائمة في أغلب الأحيان لنمذجة سلسلة الحوادث التي تحدث بمرور الزمن بصورة غير ثابتة (أي أنها تحدث بصورة متقاربة أو متباعدة).

حيث تم اختيار الأمطار المسجلة في محطتين لأنواء الجوية في محافظة بغداد والبصرة ولمدة من 2002\1\1 ولغاية

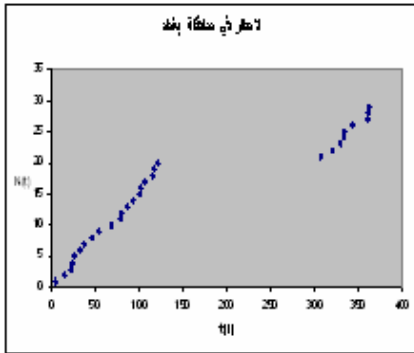
7- من خلال تجربة المحاكاة يمكن توضيح النتائج الخاصة بمتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق وكما يأتي :-

أ - إن متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (MLE) أصغر من متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (WLS) ولحجمي العينة (25 , 50) .

ب - إن متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (WLS) أصغر من متوسطات الخطأ النسبي المطلق بطريقة (MLE) ولحجمي العينات (100 , 200 , 250) .

ويمكن تلخيص عدد مرات الأفضلية باستخدام المقياس (MAPE) في الجدول (16) .

الشكل (2)



يوضح شكل انتشار النقاط في عمليات بواسون غير المتجانسة.

14 . تقدير الإمكان الأعظم للمعدل

الزمني اليومي لسقوط الأمطار

Maximum Likelihood Estimates for the Daily Rate of Rainfall

تم تقدير معالم دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار بأستخدام طريقة الإمكان الأعظم وللمحافظتين قيد الدراسة، وكما في الجدول الآتي:-

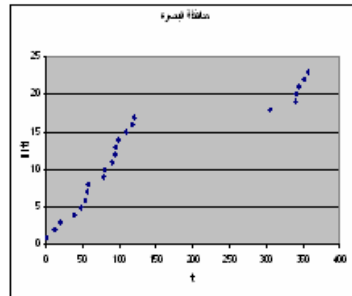
جدول (17)

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	المحافظة
0.3731164	0.7385244	بغداد
0.4368732	0.6743423	البصرة

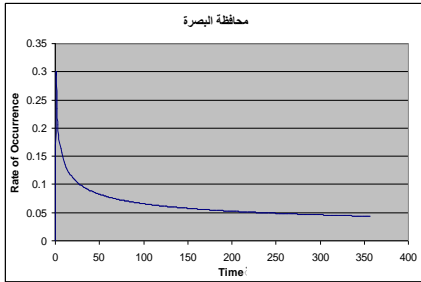
2002\12\31، حيث تم اختيار نموذج قانون القوة كمعدل زمني لسقوط الأمطار وتم تقديره باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وكذلك تم تقدير نموذج القانون الأسي باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة، بناءً على النتائج التي تم التوصل إليها في الجانب التجريبي.

وقبل تقدير معالم العمليتين البواسونيتين في المحطتين لابد من رسم البيانات، حيث إن شكل انتشار النقاط لعمليات بواسون غير المتجانسة يؤثر بتزايد غير منتظم في عدد مرات حدوث الحوادث في الزمن t ، حيث إن هذا التزايد يدل على أن البيانات للظاهرتين قيد الدراسة تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة، لاحظ الشكلين

الشكل (1)



يوضح شكل انتشار النقاط في عمليات بواسون غير المتجانسة.



الشكل (3b) منحنى المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محافظة البصرة

15 . تقدير المربعات الصغرى
الموزونة للمعدل الزمني اليومي لسقوط
الامطار

Weighted Least Squares Estimates for the Daily Rate of Rainfall

تم تقدير المعدل الزمني لسقوط الأمطار
المتمثل بالدالة

$$\lambda(t) = \exp \alpha + \beta t$$

باستخدام طريقة المربعات الصغرى
الموزونة وحسب الفترة الزمنية المحددة وكما
في الجدول (18).

1- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في

محافظة بغداد :

$$\lambda(t) = 0.2755555 t^{-0.2614756}$$

$$0 \leq t \leq 363$$

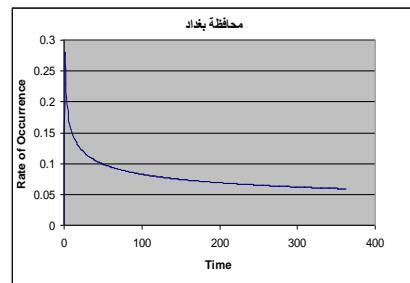
2- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في

محافظة البصرة :

$$\lambda(t) = 0.294602 t^{-0.325657}$$

$$0 \leq t \leq 357$$

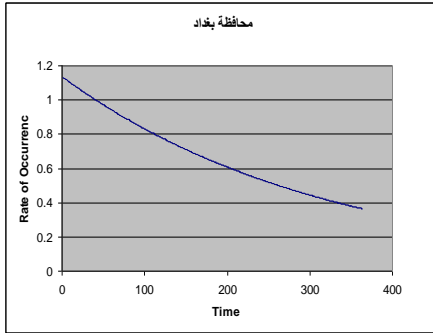
والشكلان (3a), (3b) يوضحان منحنى
دالة المعدل اليومي لسقوط المطر لكلتا
المحافظتين والتي تم تقديرها باستخدام
طريقة الإمكان الأعظم والذي يعطي مؤشراً
على تناقص المعدل اليومي لسقوط
الأمطار في المحافظتين بمرور الزمن
،وخلال الفترة الزمنية قيد الدراسة وكما
يأتي:-



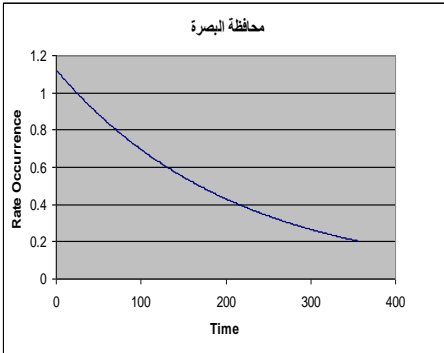
الشكل (3a) منحنى المعدل اليومي لسقوط

الأمطار في محافظة بغداد

الجدول (18)



الشكل (4a) منحنى المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محافظة بغداد



الشكل (4b) منحنى المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محافظة البصرة

المحافظة	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$
بغداد	- 0.0047955	0.116113
البصرة	- 0.0031277	0.127399

1- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في

محافظة بغداد :

$$\lambda(t) = \exp(0.116113 - (0.0047955 t))$$

$$0 \leq t \leq 363$$

2- المعدل اليومي لسقوط الأمطار في

محافظة البصرة :

$$\lambda(t) = \exp(0.127399 - (0.0031277 t))$$

$$0 \leq t \leq 357$$

والشكل (4) يوضح منحنى دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محافظتي بغداد والبصرة والتي تم تقديرها باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة، والذي يظهر تناقص المعدل اليومي لسقوط الأمطار في المحافظتين وخلال الفترة الزمنية قيد الدراسة وكما يأتي :-

16. الاستنتاجات:

من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة والتطبيق العملي وبناء على ما تم تحليله من نتائج فقد تم التوصل إلى الاستنتاجات الآتية:

1- لجميع التجارب ولكافة حجوم العينات (50, 100, 200, 250) كانت طريقة الإمكان الأعظم لها الأفضلية في تقدير معلمات نموذج قانون القوة ولكلا المقياسيين الإحصائيين (MSE) و (MAPE).

2- طريقة المربعات الصغرى الموزونة كانت أفضل من طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معلمات نموذج القانون الأسّي، حيث كانت التقديرات قريبة نسبياً من القيم الافتراضية.

3- اختيار نموذج قانون القوة كمعدل زمني لحدوث الحوادث في عمليات بواسون غير المتجانسة يتم بناءً على مدى ملاءمته للبيانات قيد الدراسة. من تقدير دالة المعدل الزمني لسقوط الأمطار في محافظتي بغداد والبصرة ظهر بأنه يتناقص مع مرور الزمن t .

17. التوصيات

1- نوصي بتقدير دالة قانون القوة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وتقدير دالة القانون الأسّي باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة.

2- نوصي بدراسة دوال أخرى كمعدلات زمنية لعمليات بواسون غير المتجانسة، كنموذج الفشل للأنظمة القابلة للإصلاح

(failure models for repairable).

3- نوصي وزارة الزراعة و وزارة الموارد المائية ببنّي سياسة ترشيد استهلاك الماء.

المصادر

المصادر العربية:

1- الخياط، باسل يونس، وسليمان، مثنى صبحي، " تحليل إحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بعملية وايبل مع تطبيق، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية - العدد (12) المجلد (7) 2007، كلية علوم الحاسبات والرياضيات جامعة الموصل.

2- شبيب، هناء سعد محمد، (2008)، " تقدير المعدل الزمني للعمليات النقطية باستخدام عمليات بواسون غير المتجانسة"، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

3- لازم، جاسم حسن (2007)، "مقارنة طرائق تقدير دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة" رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

4- مسعود، خالد أحمد (2007)، " تجديد آلات لقطاع الصناعة باستخدام النماذج الرياضية"، أطروحة دكتوراه، كلية الاقتصاد، جامعة دمشق.

المصادر الأجنبية:

5. Bjarte, R. (2007), "Exact statistical Inference in Nonhomogeneous Poisson Processes ,Based on Simulations". www.math.tamu.edu/~joel.zinn/papers/pois.pdf
6. Crow, L . H . (1974), "Repairable Analysis for Complex Repairable Systems", Reliability and Biomertry ,Ed. Proschan, F. and Serfling R.J. SIAM. Philadelphia P. 379-410.
7. Duane, J. T. (1964), Learning Approach to Reliability .IEEE Transaction on Aerospas, AS-VOL(2), 563-566.
8. Engineering Statistics Handbook, www.sbtionline.com/nist/apr/section1/opr173.htm
9. Exponential Law, www.sbtionline.com/nistlapr/section1/apr173.htm

10. Joe, H .,(1989),"Statistical Inference for General Order Statistics and Non Homogeneous Poisson Processes Software Reliability Models ", IEEE Transaction on Software Engineering November 1989 (vol.15, No .11)pp.1485-1490.
11. Non Homogeneous Poisson Processes.
www.people.cornell.edu/pages/ps92/poisson/3NHPP.pdf.
12. Non Homogeneous Poisson Processes.
www.cs.purdue.edu/Homes/gopal/es543/lectures/19_pdf
13. Poisson Processes.(2007),
[www.nnmi.kaist.ac.kr/lectures/](http://www.nnmi.kaist.ac.kr/lectures/2007ee521/chapter4.pdf)
2007ee521/chapter4.pdf
14. Zhao, W."Modeling and Analysis of Repairable Systems With General Repair".
www.reliasoft.com/pubs/2005rm_07B_03.pdf